§9 Positive lineare Funktionale und Zustände

9.0 Erinnerung: Ist X ein kompakter T_2-Raum, so sind die positiven Radon-Integrale geg. durch positive Funktionale
$$\mu : C(X) \to \mathbb{C},$$
d.h. μ ist linear und $\mu(f) \geq 0$, falls $f \geq 0$. Nach dem Satz von Riesz ex. zu μ genau ein endl. Borel-Maß $d\mu$ auf X mit
$$\mu(f) = \int_X f(x)\, d\mu(x) \quad \forall f \in C(X).$$
Wir haben dann eine Bijektion $\mu \mapsto d\mu$ zwischen den positiven Funktionalen auf X und den endl. Borel-Maßen auf X. (siehe z.B. Rudin "Real and complex Analysis").

9.1 Def: Sei A eine C^*-Algebra. Ein lin. Fkt. $\varphi : A \to \mathbb{C}$ heißt positiv, falls $\varphi(a^*a) \geq 0 \ \forall a \in A$. Wir setzen $\mathcal{P}(A) = \{\varphi : A \to \mathbb{C} \mid \varphi \text{ pos. lin. Fkt}\}$.

9.2 Bem: Ist $\varphi \in \mathcal{P}(A)$, so def φ eine positive semi-def. hermitesche Form auf A durch
$\langle , \rangle_\varphi : A \times A \to \mathbb{C}$; $\langle a, b \rangle_\varphi := \varphi(b^*a)$.
Es ist sofort klar, dass $\langle , \rangle_\varphi$ alle gew. Eigensch. erfüllt, bis auf $\langle a,b\rangle_\varphi = \overline{\langle b,a\rangle_\varphi}$, $a,b \in A$. Dies folgt aus:

9.3 Lemma Ist $\varphi \in \mathcal{P}(A)$, so gilt $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)} \ \forall a \in A$.
Bew: Ist $x \in A_{sa}$, so gilt $x = u - v$ mit $u, v \in A_+$, also $\varphi(x) = \varphi(u) - \varphi(v) \in \mathbb{R}$, da $\varphi(u), \varphi(v) \geq 0$ (es ex $a, b \in A$ mit $u = a^*a$, $v = b^*b$). Ist $a = x + iy$

mit $x, y \in A_{sa}$, so folgt

$$\varphi(a^*) = \varphi(x - iy) = \varphi(x) - i\varphi(y) = \overline{\varphi(x) + i\varphi(y)} = \overline{\varphi(a)}.$$ ☒

9.4 Lemma Ist $\varphi \in P(A)$, so ist φ stetig.

Bew: Ist $a \in A$ so ex. $u, v, u', v' \in A_+$ mit $\|\cdot\| \leq \|a\|$ $(\cdot = u, v, u', v')$ und $a = (u - v) + i(u' - v')$.

[Die Normabsch. folgt aus $\|\mathrm{Re}\, a\| = \|\frac{1}{2}(a + a^*)\| \leq \|a\|$, ebenso $\|\mathrm{Im}\, a\| \leq \|a\|$ und $\|x_+\|, \|x_-\| \leq \|x\|$ $\forall x \in A_{sa}$].

Daher genügt es zu zeigen, dass ein $M \geq 0$ ex. mit
$$\varphi(a) \leq M\|a\| \quad \forall a \in A_+.$$

Ann: Das gilt nicht?

Dann ex. eine Folge $(a_n)_n$ in A_+ mit $\|a_n\| = 1$ $\forall n$ und $\varphi(a_n) \geq 2^n$. Setze dann
$$a := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} a_n \in A_+.$$

Dann folgt für alle $N \in \mathbb{N}$:
$$N \leq \varphi\Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} a_n\Big) \underset{\uparrow}{\leq} \varphi\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} a_n\Big) = \varphi(a) < \infty. \text{ Wid!}$$
da $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} a_n \geq 0$. ☒

9.5 Folgerung: Ist $\varphi \in P(A)$, so gilt $|\varphi(a)|^2 \leq \|\varphi\|\, \varphi(a^*a)$ für alle $a \in A$.

Bew: Sei $(u_\lambda)_\lambda$ eine approx. Eins in A wie in 8.2, also gilt insb. $0 \leq u_\mu \leq u_\lambda$ $\forall \mu \leq \lambda$ und $\|u_\lambda\| \leq 1$ $\forall \lambda$.

Dann gilt:
$$|\varphi(a)|^2 \overset{\varphi \text{ stetig}}{=} \lim_\lambda |\varphi(u_\lambda a)|^2 = \lim_\lambda |\langle a, u_\lambda\rangle_\varphi|^2$$
$$\overset{C\text{-}S}{\leq} \sup_\lambda \langle u_\lambda, u_\lambda\rangle_\varphi \langle a, a\rangle_\varphi = \sup_\lambda \varphi(u_\lambda^2)\, \varphi(a^*a) \overset{\|u_\lambda\| \leq 1}{\leq} \|\varphi\|\, \varphi(a^*a)$$ ☒

9.6 Satz Sei A eine C^*-Alg. und $\varphi \in A'$ (also φ stetige lin. Fkt. auf A). Dann sind äquivalent:

(1) φ ist positiv.

$$|\varphi(a)-in|^2 = \lim_\lambda |\varphi(a)-in\varphi(u_\lambda)|^2 = \lim_\lambda |\varphi(a-inu_\lambda)|^2$$
$\|\varphi\|=1$
$$\le \lim_\lambda \big(1+n^2+n\underbrace{\|au_\lambda-u_\lambda a\|}_{\to 0}\big) = 1+n^2. \quad (*)$$

Jedoch: $|\varphi(a)-in|^2 = |x-i(y+n)|^2 = x^2+(y+n)^2$
$= x^2+y^2+n^2+2yn$,

folgt mit (*): $x^2+y^2+2yn \le 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$. Widerspruch zu $y>0$!

Sei nun $a\ge 0$ mit $\|a\|=1$. Dann gilt $\|1-a\|\le 1$ (7.8).
Dann folgt:
$$|\varphi(a)-1| = \lim_\lambda |\varphi(au_\lambda)-\varphi(u_\lambda)| = \lim_\lambda |\varphi((a-1)u_\lambda)|$$
$$\le \|(a-1)u_\lambda\| \le \|a-1\|\,\|u_\lambda\| \le 1, \quad (a-1\in\tilde{A}).$$
Da $\varphi(a)\in\mathbb{R}$ gilt also $|\varphi(a)-1|\le 1 \Rightarrow \varphi(a)\ge 0$. ∎

9.7 Folgerung: Sei A C^*-Algebra und $\varphi,\psi\in P(A)$.
Dann gilt $\|\varphi+\psi\| = \|\varphi\|+\|\psi\|$.

Bew: Da $(\varphi+\psi)(a^*a) = \varphi(a^*a)+\psi(a^*a)\ge 0 \ \forall a\in A$ ist $\varphi+\psi$ positiv. Dann folgt mit $(u_\lambda)_\lambda$ wie in 8.2:
$$\|\varphi+\psi\| = \lim_\lambda (\varphi+\psi)(u_\lambda) = \lim_\lambda \varphi(u_\lambda)+\lim_\lambda \psi(u_\lambda) = \|\varphi\|+\|\psi\|.$$ ∎

9.8 Satz: Sei A eine C^*-Algebra. Dann ex. zu jedem $\varphi\in P(A)$ genau ein $\tilde\varphi\in P(A^1)$ mit $\tilde\varphi_{|A}=\varphi$ und $\|\tilde\varphi\|=\|\varphi\|$. Es gilt dann für alle $a+\mu 1\in A^1$:
$$\tilde\varphi(a+\mu 1) = \varphi(a)+\mu\|\varphi\|. \quad (*).$$

Bew: Eindeutigkeit: Ist $\tilde\varphi\in P(A^1)$ mit $\tilde\varphi_{|A}=\varphi$ und $\|\tilde\varphi\|=\|\varphi\|$, so folgt mit 9.6, dass $\tilde\varphi(1)=\|\varphi\|$, also $\tilde\varphi(a+\mu 1) = \tilde\varphi(a)+\mu\tilde\varphi(1) = \varphi(a)+\mu\|\varphi\|$.
Sei umgekehrt $\tilde\varphi$ wie in (*). Dann ist $\tilde\varphi$ stetig.
Zeige: Es gilt $\|\tilde\varphi\|=\|\varphi\|$ (dann folgt $\|\tilde\varphi\|=\tilde\varphi(1)$ und damit $\tilde\varphi\in P(A^1)$ nach 9.6.).

(2) Es ex. eine approx. Eins $(u_\lambda)_\lambda$ mit $0 \le u_\lambda \le u_\mu$ und $\|u_\lambda\| \le 1$ $\forall \lambda, \mu$ mit $\lambda \le \mu$ mit $\|\varphi\| = \lim_\lambda |\varphi(u_\lambda)|$.

(3) Für jede approx. Eins $(u_\lambda)_\lambda$ wie in (2) gilt $\|\varphi\| = \lim_\lambda \varphi(u_\lambda)$.

Insbesondere folgt: Ist A unital und $\varphi \in A'$, so gilt: $\varphi \ge 0 \iff \|\varphi\| = \varphi(1)$.

Bew: Es gelte o.B.d.A $\|\varphi\| = 1$.

(1) $\Rightarrow$ (3): Ist $(u_\lambda)_\lambda$ wie in (2) und ist $\varphi \ge 0$, so ist $(\varphi(u_\lambda))_\lambda$ ein monoton wachsendes durch 1 beschränktes Netz, also ex. $\lim_\lambda \varphi(u_\lambda) \le 1$.
Sei nun $\varepsilon > 0$ und $a \in A$ mit $\|a\| = 1$ und $|\varphi(a)|^2 \ge 1 - \varepsilon$. Wegen $0 \le u_\lambda \le 1$ (in $\tilde{A}$) gilt $u_\lambda^2 \le u_\lambda$, denn mit $c = \sqrt{u_\lambda}$ folgt mit 7.15:
$u_\lambda^2 = c u_\lambda c \le c 1 c = u_\lambda$. Damit folgt:

$$1 - \varepsilon \le |\varphi(a)|^2 = \lim_\lambda |\varphi(u_\lambda a)|^2 \overset{CS}{\le} \sup_\lambda \varphi(u_\lambda^2)\varphi(a^* a)$$

$$\overset{u_\lambda^2 \le u_\lambda}{\le} \sup_\lambda \varphi(u_\lambda) \overbrace{\varphi(a^* a)}^{\le 1} \le \sup_\lambda \varphi(u_\lambda) \overset{\text{Monotonie}}{=} \lim_\lambda \varphi(u_\lambda).$$

Da $\varepsilon > 0$ bel. folgt $\lim_\lambda \varphi(u_\lambda) = 1 = \|\varphi\|$.

(3) $\Rightarrow$ (2) ist klar.

(2) $\Rightarrow$ (1): Wir zeigen zunächst, dass $\varphi(a) \in \mathbb{R}$ für alle $a \in A_{sa}$. Sei also $a = a^*$ mit $\|a\| = 1$ und sei $\varphi(a) = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

Ann: $y \ne 0$. Dann o.B.d.A $y > 0$ (sonst Überg. auf $-a$).
$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $\|a - i n u_\lambda\|^2 = \|(a + i n u_\lambda)(a - i n u_\lambda)\|$
$= \|a^2 + n^2 u_\lambda^2 + i n(u_\lambda a - a u_\lambda)\|$
$\le 1 + n^2 + n\|u_\lambda a - a u_\lambda\|$.

Da $\varphi(u_\lambda) \to 1 = \|\varphi\|$ folgt:

Sei dazu $(u_\lambda)_\lambda$ eine approx. Eins in A wie in Satz 8.2. Dann gilt: $\|\varphi\| = \lim_\lambda \varphi(u_\lambda)$ und

$$|\tilde{\varphi}(a+\mu 1)| = |\varphi(a) + \mu\|\varphi\|| = \lim_\lambda |\varphi(au_\lambda) + \mu\varphi(u_\lambda)|$$

$$= \lim_\lambda |\varphi((a+\mu 1)u_\lambda)| \leq \|\varphi\| \|a+\mu 1\|.$$

Damit folgt $\|\tilde{\varphi}\| \leq \|\varphi\|$ und wegen $\tilde{\varphi}_{|A} = \varphi$ gilt auch $\|\tilde{\varphi}\| \geq \|\varphi\|$. ∎

9.9 Satz Sei B eine C^*-Unteralg. d. C^*-Alg. A. Dann ex. zu jedem $\varphi \in P(B)$ ein $\tilde{\varphi} \in P(A)$ mit
$$\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\| \text{ und } \tilde{\varphi}_{|B} = \varphi.$$

Bew: Ist $A = B^1$, so folgt d. Satz aus 9.8.
Ist A unital und $1_A \in B$, so ex. nach Hahn-Banach zunächst ein $\tilde{\varphi} \in A'$ mit $\tilde{\varphi}_{|B} = \varphi$ und $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Aber dann gilt mit 9.6:
$$\tilde{\varphi}(1_A) = \varphi(1_A) = \|\varphi\|, \text{ also } \tilde{\varphi} \in P(A).$$
Ist A unital und $1_A \notin B$, so setze φ zunächst fort auf $B^1 = B + \mathbb{C}1_A \subseteq A$ und setze dann weiter fort auf A.
Ist A nicht unital, so ersetze A durch A^1. ∎

9.10 Definition Sei $\varphi \in P(A)$ mit $\|\varphi\| = 1$. Dann heißt φ ein Zustand auf A. Wir setzen
$$S(A) = \{\varphi \in P(A) \mid \|\varphi\| = 1\}.$$
(Zustandsraum von A.)

9.11 Bsp: (1) Ist $A = C(X)$ für X kompakt, T_2, so sind die Zustände gerade die Wahrscheinlichkeits (Borel-)Maße auf X (vergl. mit 9.0).

(2) Ist $A = L(H)$ für einen $\mathbb{C}$-HR H, so def. jedes $\xi \in H$ ein positives Fkt. $\varphi_\xi : L(H) \to \mathbb{C}$ durch $\varphi_\xi(T) := \langle T\xi, \xi \rangle$. (Nutze Satz 7.9).
Dann gilt $\|\varphi_\xi\| = \varphi(1_H) = \langle \xi, \xi \rangle = \|\xi\|^2$ und φ_ξ ist Zustand g.d.w. $\|\xi\| = 1$.
Die Zustände φ_ξ heißen "Vektorzustände" von $L(H)$.

9.12 Bem (1) Ist A C^*-Algebra ohne 1, so ist die Abb. $\mathcal{S}(A) \to \mathcal{S}(A^1)$; $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ wie in 9.8 eine Einbettung von $\mathcal{S}(A)$ nach $\mathcal{S}(A^1)$.
(2) $\mathcal{S}(A)$ ist konvex: Sind $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(A)$ und $0 \le \lambda \le 1$, so ist $\lambda\varphi + (1-\lambda)\psi$ positiv mit
$\|\lambda\varphi + (1-\lambda)\psi\| \overset{9.7}{=} \|\lambda\varphi\| + \|(1-\lambda)\psi\| = \lambda\|\varphi\| + (1-\lambda)\|\psi\| = 1$.

Wir schließen diesen Abschnitt mit:

9.13 Satz Sei A ein C^*-Algebra. Dann ex. zu jedem $a \in A$ normal ein $\varphi \in \mathcal{S}(A)$ mit
$$|\varphi(a)| = \|a\|.$$
Insbes. ex. zu jedem $a \in A$ ein $\varphi \in \mathcal{S}(A)$ mit
$$\varphi(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2.$$
Bew: Sei o.B.d.A. A mit 1. (sonst Übergang auf A^1).
Setze $B = C^*(a, 1) \subseteq A$. Dann ist $B \cong C(\hat{B})$ mit $a \mapsto \hat{a}$. Da $\hat{B}$ kompakt, ex. ein $\chi \in \hat{B}$ mit
$\|a\| = \|\hat{a}\|_\infty = |\hat{a}(\chi)| \doteq |\chi(a)|$.
Da $\chi : B \to \mathbb{C}$ $*$-Homom. gilt $\chi(b^*b) = \overline{\chi(b)}\chi(b) \ge 0$ für alle $b \in B$, also $\chi \in P(B)$ mit $\|\chi\| = 1$. Nach 9.9 ex. ein $\varphi \in \mathcal{S}(A)$ mit $\varphi|_B = \chi$, und dann folgt auch $|\varphi(a)| = |\chi(a)| = \|a\|$. ☒